Z. Rechtsmedizin 69, 125—131 (1971)

Das Bayessche Theorem und die Überprüfung seiner Anwendung zur Berechnung der Vaterschaftsplausibilität

Ein Beitrag zur Methodendiskussion in der Vaterschafts-Biostatistik

H.-D. Wehner und Ch. Rittner
Institut für gerichtliche Medizin der Universität Bonn (BRD)

Eingegangen am 1. April 1971

Bayes' Theorem and its Applicability for Paternity Evaluation

Summary. Applying Bayes' theorem a method for the calculation of the plausibility of paternity is proposed. The estimate of q as realization of the events DV—the occurrence of dublets mother-child with true fathers—and $\overline{DV}$—the occurrence of dublets mother-child with falsely alleged men—serves as means to prove the correctness of the application. Experts in blood group serology are invited to estimate q in their case material to find out if Bayes' theorem can be applied to paternity calculations.

Zusammenfassung. Das Bayessche Theorem wird zur Berechnung der Vaterschaftsplausibilität angewendet und gleichzeitig die Richtigkeit der Anwendung durch Schätzung des Verhältnisses $\bar{q}/q$ in einem gegebenen Material überprüft. Durch das angegebene Verfahren erhält die Schätzung von q eine breite Grundlage, da es nicht nur aus dem Verhältnis der Ausschlüsse zur mittleren Ausschlußwahrscheinlichkeit, sondern aus sämtlichen Terzetttypen ermittelt wird. Dem Blutgruppengutachter wird empfohlen, q in seinem Material zu schätzen und festzustellen, ob eine Berechnung der Vaterschaftsplausibilität in seinem Material nach dem Bayesschen Theorem möglich ist.
Key-Words: Bayessches Theorem — Vaterschafts-Plausibilität.

1. Einführung

Nach Änderung des Nichtehelichenrechts zum 1. 7. 70 lautet der Auftrag des Gesetzgebers, den biologischen Vater des Kindes festzustellen (§ 1600o, I, BGB). Da es einen positiven serologischen Vaterschaftstest nicht gibt und auch nicht geben wird, können Hinweise auf die Vaterschaft nur über die biostatistische Auswertung der serologisch ermittelten Blut-, Serum- und Enzymgruppenbefunde gewonnen werden, will man für die Mehrzahl der Fälle von erbbiologischen Erhebungen absehen. Wie die Einsetzung einer eigenen Kommission für diese Problematik beim Bundesgesundheitsamt zeigt, ist die Diskussion über die Methode der Wahl noch in vollem Flusse. Eine Entscheidung über das anzuwendende mathematische Verfahren ist noch nicht getroffen. Dieser Feststellung steht nicht entgegen, daß einige Verfahren heute schon praktisch angewendet werden (s. z.B. Essen-Möller [1], Hummel [4], Fiedler et al. [2]). Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, das Bayessche Theorem nicht nur exakt zur Berechnung der Vaterschafts-Plausibilität anzuwenden, sondern gleichzeitig eine Möglichkeit mitzuteilen, die Richtigkeit der Anwendung zu überprüfen. Hierzu bot sich die Schätzung des tatsächlichen Verhältnisses zwischen nicht dublettengebundenen („fälschlich bezichtigten") Männern zu den zu Dubletten gehörenden Männern („wahren Vätern") in einem gegebenen Material an, das erstmals von Schiff [6] aus dem Verhältnis der tatsächlichen zu den theoretisch möglichen Ausschlüssen ermittelt wurde. Ludwig [5] interpretierte dieses Verhältnis φ oder Q als sog. sozialbiologische Konstante, die jedoch von der Art des anhängigen Rechtsstreites abhängig ist. In jüngerer Zeit haben Schulte-Mönting und Hummel [7] eine Schätzung von Q über die Ausschlußwahrscheinlichkeit vorgenommen.

Die Anwendung theoretischer Überlegungen erscheint uns erst dann gerechtfertigt, wenn sie durch die Wirklichkeit bestätigt wird.

2. Das Bayessche Theorem (s. z.B. Fisz [3])

Das Bayessche Theorem lautet:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\,P(B|A_1)}{P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)}. \tag{1}$$

A_i ($i=1,2$) bzw. B sind zufällige Ereignisse; $P(A_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit (a-priori-Wahrscheinlichkeit) von A_i; $P(A_1|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von A_1 unter der Bedingung, daß das Ereignis B eingetroffen ist.

Die Formel besagt also, daß sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_1 unter der Bedingung B $[P(A_1|B)]$ ausdrücken läßt durch die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_1 sowie A_2 $[P(A_1), P(A_2)]$ und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_1)$ sowie $P(B|A_2)$. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Satzes sind:

a) Die zufälligen Ereignisse A_1 und A_2 müssen sich gegenseitig ausschließen,

b) die Summe der Wahrscheinlichkeiten von A_1 und A_2 muß gleich 1 sein:

$$P(A_1) + P(A_2) = 1 \text{ (Satz über die totale Wahrscheinlichkeit).}$$

3. Konstruktion zweier sich ausschließender bedingter Ereignisse bei der Berechnung der Vaterschaftsplausibilität

Die Häufigkeit eines männlichen Merkmalsträgers S ist bekannt. Sie wird aufgefaßt als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das zufällige Ereignis S eintritt (dann $P(S)$). Man weiß, daß Mutter und Kind zusammengehören, also mit anderen Worten ein Dublett D vorliegt. Der männliche Merkmalsträger S kann mit dem Dublett ein echtes Terzett bilden (mithin Vater sein) oder nicht. Das heißt, das Ereignis S läßt sich als Summe zweier sich ausschließender Ereignisse schreiben:

$$S = SDV + S\overline{DV} \tag{2}$$

nämlich des Ereignisses SDV — daß der männliche Merkmalsträger S vorliegt und daß das Dublett vorliegt und daß der männliche Merkmalsträger Vater V des betrachteten Kindes ist — und des Ereignisses $S\overline{DV}$, daß zwar der männliche Merkmalsträger S, aber *nicht* das Ereignis D *und* V ($\overline{DV}$) vorliegt.

Man kann dies wie folgt veranschaulichen (Abb. 1):

Gegeben sei ein Gesamtkollektiv K. Darin sind männliche Merkmalsträger des Typs S zu finden (symbolisiert mit einem schwarzen Stern auf weißem

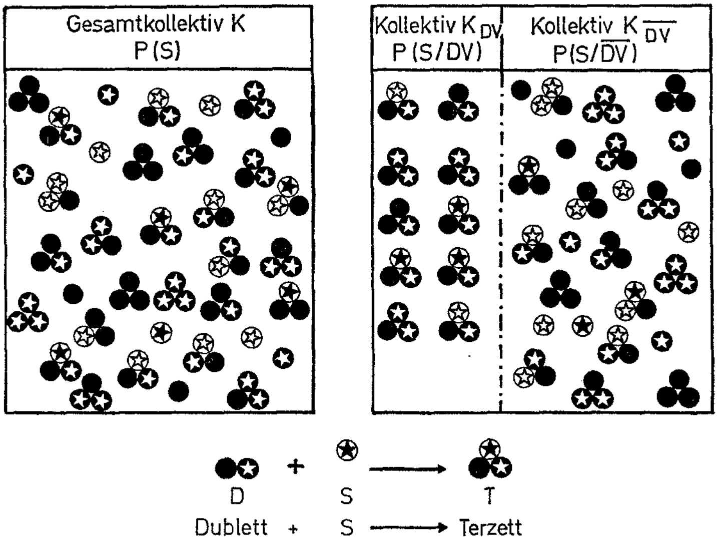

Abb. 1. Darstellung der Konstruktion der beiden Teilkollektive K_{DV} und $K_{\overline{DV}}$ aus dem Gesamtkollektiv K

Grund). Sie sind im Gesamtkollektiv K mit einer Häufigkeit $P(S)=6/35$ enthalten. Die Elemente dieses Gesamtkollektivs K wollen wir nun nach folgendem Gesichtspunkt ordnen: In ein Teilkollektiv (K_{DV}) werden alle mit D bezeichneten Dublette (symbolisiert durch einen schwarzen Punkt sowie einen weißen Stern auf schwarzem Grund) mit den dazugehörigen Vätern sortiert; alle anderen Elemente werden im Teilkollektiv $K_{\overline{DV}}$ zusammengefaßt. Man sieht sofort, daß jetzt in jedem der beiden Teilkollektive der männliche Merkmalsträger S mit einer anderen Häufigkeit vorkommt. Während nämlich im Gesamtkollektiv die Häufigkeit 6/35 war, ist sie jetzt:

$$\text{in } K_{DV}\colon\ 3/10=0{,}3,$$
$$\text{in } K_{\overline{DV}}\colon\ 3/25=0{,}12.$$

Das nützliche Resultat unserer ganzen Operation ist, daß das Gesamtkollektiv K so geschickt in zwei sich ausschließende Teilkollektive K_{DV} und $K_{\overline{DV}}$ aufgeteilt wurde, daß nur in einem Teilkollektiv — nämlich K_{DV} — alle Dubletten des Typs D mit ihren Vätern sind. Anders ausgedrückt bedeutet das: Wird ein Merkmalsträger des Typs S aus dem Teilkollektiv K_{DV} vorgestellt, dann wissen wir sofort, daß es sich nur um einen Vater handeln kann, der zu einem Dublett D gehört.

Bevor wir Überlegungen über die Wahrscheinlichkeit einer solchen Vorstellung anstellen, wollen wir kurz die eben an einem Beispiel vorgenommene Sortierung allgemein durchführen:

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses S ist:

$$P(S)=P(SDV)+P(S\overline{DV}). \tag{3}$$

Dieser Ausdruck (3) läßt sich mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeiten auf die folgende Form bringen:

$$P(S) = P(DV)\, P(S|DV) + P(\overline{DV})\, P(S|\overline{DV}), \tag{4}$$

mit

$$P(DV) + P(\overline{DV}) = 1. \tag{5}$$

$P(S|DV)$ und $P(S|\overline{DV})$ stellen die beiden sich ausschließenden bedingten Ereignisse dar, die für die Anwendung des Bayesschen Theorems erforderlich sind. Da sich die Größen $P(DV)$ und $P(S|DV)$ an Hand eines einfachen Erbschemas bestimmen lassen, sind wegen der Bedingung (5) außer $P(S|\overline{DV})$ alle Größen des Ausdruckes (4) bekannt; die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(S|\overline{DV})$ kann somit errechnet werden:

$$P(S|\overline{DV}) = \frac{P(S) - P(DV)P(S|DV)}{P(\overline{DV})}. \tag{6}$$

4. Realisation der Ereignisse DV und $\overline{DV}$ in einem gegebenen Material

Angenommen (s. wieder Abb. 1), man würde in zufälliger Weise abwechselnd aus jedem der beiden Teilkollektive Männer vorstellen, so würde der benannte männliche Merkmalsträger vom Typ S mit einer Häufigkeit von:

$$H(S) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}12 = 0{,}21$$

vorgestellt.

Umgekehrt kann aber auch gesagt werden: Wenn der männliche Merkmalsträger S mit der Häufigkeit von

$$H(S) = 0{,}21$$

vorgestellt wurde, dann wurden *abwechselnd* (d.h. je zu gleichen Teilen) Männer aus dem einen wie aus dem anderen Teilkollektiv vorgestellt. Das ist *eine* Möglichkeit, die Teilkollektive zu berücksichtigen. Es könnte bei einer Vorstellung aber auch der männliche Merkmalsträger S mit einer Häufigkeit von

$$H(S) = 0{,}228$$

auftreten. Dann können wir sofort schließen, daß das Teilkollektiv K_{DV} zu 60% und das Teilkollektiv $K_{\overline{DV}}$ nur zu 40% berücksichtigt wurde, denn es ist in diesem Fall

$$H(S) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}12 = 0{,}228.$$

Welche Erkenntnis haben wir aus diesem Gedankenexperiment gewonnen? Diese Frage kann leicht beantwortet werden: Wenn wir wissen, mit welchen Häufigkeiten $[P(S|\overline{DV}), P(S|DV)]$ sich Merkmalsträger vom Typ S in zwei sich ausschließenden Teilkollektiven befinden und wenn diese mit einer gewissen Häufigkeit $H(S)$ vorgestellt werden, dann können wir in eindeutiger Weise bestimmen, zu welchen Anteilen die beiden Teilkollektive berücksichtigt worden sind.

Natürlich nutzen wir diese Erkenntnis u. a. sofort dazu aus, um in einem Test festzustellen, in welchem Verhältnis Merkmalsträger vom Typ S bei Vaterschaftsbegutachtungen aus dem Teilkollektiv K_{DV} bzw. aus dem Teilkollektiv $K_{\overline{DV}}$ vorgestellt wurden. Doch wollen wir zuvor die bisherigen Gedanken, die sich an einem speziellen Beispiel orientiert haben, allgemeiner formulieren. Dann hört sich die gewonnene Erkenntnis folgendermaßen an:

Das Ereignis S kann sich entweder im Teilkollektiv K_{DV} mit dem Gewicht q oder im Teilkollektiv $K_{\overline{DV}}$ mit dem Gewicht $\bar{q}$ realisieren. Es muß notwendigerweise

$$q + \bar{q} = 1$$

sein.

Die gemessene Häufigkeit $H(S)$ des männlichen Merkmalsträgers S setzt sich dann wie folgt zusammen:

$$H(S) = q \cdot P(S|DV) + (1 - q)\, P(S|\overline{DV}). \tag{7}$$

Da $P(S|\overline{DV})$ und $P(S|DV)$ bekannt sind und sich $H(S)$ durch Messung gewinnen läßt, wird q abschätzbar:

$$q = \frac{H(S) - P(S|\overline{DV})}{P(S|DV) - P(S|\overline{DV})}. \tag{8}$$

Der Nenner von (8) drückt unmittelbar die Empfindlichkeit W_i der Abschätzung von q aus:

$$W_i = P(S|DV) - P(S|\overline{DV}). \tag{9}$$

5. Schätzung von q in einem Gutachtenmaterial für ein System

Da das in (8) beschriebene Verhältnis je nach Gerichtssache verschieden ist, haben wir 2829 Fälle von Unterhaltsklagen mit einem benannten Mann ausgewertet. Es handelt sich ausschließlich um Material unseres Institutes. Zur Schätzung von q wird zunächst das MN-System gewählt, weil es wegen seiner zwei co-dominanten Allele am einfachsten zu bearbeiten ist. In Spalte 1 der Tabelle sind alle Mutter-Kind-verträglichen Terzettypen eingetragen. Die sich ausschließenden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(S|DV)$ und $P(S|\overline{DV})$ sind mit der jeweiligen Dubletthäufigkeit multipliziert. Die Ergebnisse stehen in den Spalten 2 und 3. Sie wurden aus den folgenden echten, gemessenen Häufigkeiten ermittelt:

Männer		Frauen[1]	
H(M)	0,3046	H(M)	0,3026
H(MN)	0,4832	H(MN)	0,5055
H(N)	0,2124	H(N)	0,1919

Das Dublett MN—MN wird außer Betracht gelassen, weil die beiden sich ausschließenden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(S|DV)$ und $P(S|\overline{DV})$ untereinander gleich sind und somit für diesen Fall wegen $W_i = 0$ (s. Formel 9) keine Abschätzung von q möglich ist.

1 Es kann hier nicht geprüft werden, worauf diese Unterschiede beruhen. Sie werden lediglich zur Berechnung der notwendigen Größen akzeptiert.

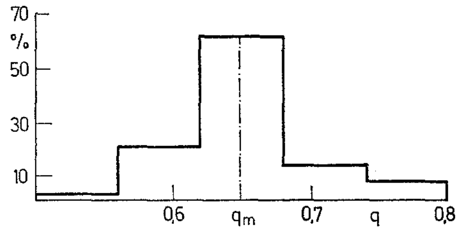

Abb. 2. Prozentuale Häufigkeitsverteilung von q

Tabelle. *Schätzung von q in einem Material von 2829 Fällen von Unterhaltsklagen mit einem benannten Mann am Beispiel des MN-Systems*

Spalte 1			Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4	Spalte 5	Spalte 6
Terzett-Typ			$P(D)\ P(S\|DV)$ (%)	$P(D)\ P(S\|\overline{DV})$ (%)	Messung (%)	q_i	W_i
K	*M*	*PV*					
MM	MM	MM	9,27	4,14	7,36	0,628	5,13
MM	MM	MN	7,31	8,00	7,56	0,638	0,69
MM	MM	NN	0	4,15	1,51	0,713	4,15
MM	MN	MM	7,69	3,69	6,40	0,677	4
MM	MN	MN	6,11	6,85	6,32	0,716	0,73
MM	MN	NN	0	3,45	1,24	0,641	3,45
MN	MM	MM	0	4,93	2,08	0,578	4,93
MN	MM	MN	7,31	6,63	7,1	0,691	0,68
MN	MM	NN	6,43	2,39	4,74	0,582	4,04
MN	MN	MM	q nicht abschätzbar wegen $P(S\|DV) = P(S\|\overline{DV})$				
MN	MN	MN					
MN	MN	NN					
MN	NN	MM	5,85	2,77	4,8	0,659	3,08
MN	NN	MN	4,63	4,86	4,7	0,695	0,23
MN	NN	NN	0	2,39	0,85	0,644	2,39
NN	MN	MM	0	4,12	1,49	0,638	4,12
NN	MN	MN	6,11	5,71	5,79	0,5	0,4
NN	MN	NN	5,37	2,15	4,54	0,742	3,22
NN	NN	MM	0	3,03	0,99	0,673	3,03
NN	NN	MN	4,63	4,35	4,5	0,536	0,28
NN	NN	NN	4,08	1,71	3,22	0,637	2,37

In Spalte 4 sind die prozentualen Terzetthäufigkeiten aufgeführt. Daraus errechnet sich q (Spalte 5) nach der in (8) angegebenen Formel. Die durch (9) beschriebene Empfindlichkeit W_i befindet sich in Spalte 6.

Wichtet man nach der Empfindlichkeit W_i, so ergibt sich für q die in Abb. 2 dargestellte Häufigkeitsverteilung. Aus ihr ist der Mittelwert von q:

$$q_m = 0{,}648$$

zu entnehmen. Die Standardabweichung beträgt

$$\sigma = 0{,}012 .$$

6. Diskussion

Während Hummel [4] eine $\bar{q}/q$-Schätzung allein über das Verhältnis der in einem Material festgestellten Häufigkeit ausgeschlossener Männer zur mittleren Ausschlußwahrscheinlichkeit vornimmt, bietet der hier mitgeteilte Ansatz die Möglichkeit zur Schätzung von $\bar{q}/q$ für *sämtliche Terzettypen* in allen untersuchten Systemen, aber auch deren Kombinationen. Somit gewinnt man eine viel breitere Grundlage für die wünschenswerte [4] Prüfung des Verhältnisses $\bar{q}/q$, die den Anteil der Ausschlußkonstellationen mit einbezieht. Darüber hinaus gibt die Streuung von q Aufschluß über die Anwendbarkeit der oben theoretisch ausgearbeiteten Methode auf ein Gutachtenmaterial. Damit kann jetzt jeder Gutachter die Realisation der Ereignisse DV und $\overline{DV}$ in seinem gegebenen Material testen und damit feststellen, ob eine Berechnung der Vaterschaftsplausibilität nach dem Bayesschen Theorem in seinem Material überhaupt möglich ist, wobei zu überlegen wäre, welche Grenzen für die Streuung von q zugelassen werden könnten.

Literatur

1. Essen-Möller, E.: Die Beweiskraft der Ähnlichkeit im Vaterschaftsnachweis. Theoretische Grundlagen. Mitt. anthrop. Ges. (Wien) **68**, 9 (1938).
2. Fiedler, H., Hoppe, H. H., Pettenkofer, H. J.: Ein neuer Weg zum „positiven Vaterschaftsbeweis" über die statistische Auswertung serologischer Befunde. Bundesgesundheitsblatt **9/10**, 129 (1968).
3. Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
4. Hummel, K., Ihm, P., Schmidt, V.: Biostatistische Abstammungsbegutachtung. Stuttgart: Gustav Fischer Vorabdruck 1970.
5. Ludwig, W.: Die wahrscheinlichkeitstheoretische Argumentation bei der Vaterschaftsdiagnose. Wiss. Z. d. Karl-Marx-Universität Leipzig **4**, 13 (1954/55).
6. Schiff, F.: Die Erfolgsaussichten der serologischen Abstammungsuntersuchung. Ärztl. Sachverst. Z. **33**, 49 (1927).
7. Schulte-Mönting, J., Hummel, K.: Zum Problem der a-priori-Wahrscheinlichkeit bei der Berechnung der Vaterschaftsplausibilität. Berechnungsgrundlagen. Z. Immun.-Forsch. **139**, 212 (1970).

Dipl.-Phys. H. D. Wehner
Priv.-Doz. Dr. med. Ch. Rittner
D-5300 Bonn, Stiftsplatz 12